Exercice 5

Déterminer suivant les valeurs de θ ($\theta \in [0;2\pi[$) le module et l'argument de chacun des nombres complexes suivant:

$z_1 = \cos\theta + i(1+\sin\theta)$, $z_2 = 1+\cos\theta + i\sin\theta$, $z_3 = 1+\sin\theta - i\cos\theta$, $z_4 = 1+i\tan\theta$,

$z_5 = \dfrac{1+\cos\theta + i\sin\theta}{1+\cos\theta - i\sin\theta}$, $z_6 = \dfrac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}$

$z_1 = \cos\theta + i(1+\sin\theta)$ $\theta \in [0, 2\pi[$

On peut écrire $\cos\theta + i + i\sin\theta$

$\cos\theta + i\sin\theta + i \Rightarrow$

$e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}} = 2\cos\frac{\theta - \frac{\pi}{2}}{2} \cdot e^{i\frac{\theta+\frac{\pi}{2}}{2}}$

$|z| = 2\cos\frac{\theta-\frac{\pi}{2}}{2}$ et $\arg z = \frac{\theta+\frac{\pi}{2}}{2}$

$z_2 = 1+\cos\theta + i\sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi[$

On peut écrire $z = e^{i0} + e^{i\theta} = 2\cos\frac{\theta}{2} \cdot e^{i\frac{\theta}{2}}$

Donc $|z| = 2\cos\frac{\theta}{2}$ et $\arg z = \frac{\theta}{2}$

$z_3 = 1+\sin\theta - i\cos\theta$

$1 - i(\cos\theta + i\sin\theta)$

$1 - i \cdot e^{i\theta}$

$e^{i0} + e^{-i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\theta} \Rightarrow e^{i0} + e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}$

$2\cos\frac{\theta-\frac{\pi}{2}}{2} \cdot e^{i\frac{\theta-\frac{\pi}{2}}{2}} \Rightarrow$

$2\cos(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}) \cdot e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}$

Si $2\cos(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}) = 0$ alors

$\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

$k = 0 \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2} \in [0, 2\pi[$

Donc $|z| = 2\cos(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})$ $\arg z = \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}$

$z_4 = 1 + i\tan\theta$, $\theta \in [0, 2\pi[$

z est défini lorsque $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ et $\theta \neq \frac{3\pi}{2}$

$z_4 = 1 + i\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta}(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\Rightarrow z_4 = \frac{1}{\cos\theta} \cdot e^{i\theta}$

$|z| = \frac{1}{\cos\theta}$ et $\arg z = \theta$

$z_5 = \frac{1+\cos\theta + i\sin\theta}{1+\cos\theta - i\sin\theta} = \frac{1+e^{i\theta}}{1+e^{-i\theta}} = \frac{e^{i\theta}(1+e^{i\theta})}{e^{i\theta}(1+e^{-i\theta})}$

$= \frac{e^{i\theta}(1+e^{i\theta})}{e^{i\theta}+1} = e^{i\theta}$

Si $e^{i\theta} \neq -1$

Conclusion

$\theta = \pi$ z n'est pas $\theta \in [0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$ $z = e^{i\theta}$

Donc $|z| = 1$ et $\arg z = \theta$

$z_6 = \frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta} = \frac{\cancel{\frac{1}{\cos\theta}}(\cos\theta + i\sin\theta)}{\cancel{\frac{1}{\cos\theta}}(\cos\theta - i\sin\theta)}$

$\frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{i2\theta}$

si $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$ z_6 n'existe pas si

Si $\theta \in \{0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\{ \cup]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$

alors $|z| = 1$ et $\arg z = 2\theta$

Marieme Sehla/Cheikhna

Exercice 11

Simplifier les expressions suivantes:

1) $C_n = 1 + \cos x + \cos 2x + \cdots \cos nx$; $S_n = \sin x + \sin 2x + \cdots \sin nx$; (On pourra calculer $C_n + iS_n$)

2) $C_n = \cos^2 x + \cos^2 x \cos 2x + \cdots + \cos^n x \cos nx$; $S_n = \cos x \sin x + \cos^2 x \sin 2x + \cdots + \cos^n x \sin nx$; (On pourra calculer $C_n + iS_n$)

1) on a $C_n = 1 + \cos x + \cos 2x + \dots \cos nx$

$S_n = \sin x + \sin 2x + \dots \sin nx$

$C_n + iS_n = 1 + (\cos x + i\sin x) + (\cos 2x + i\sin 2x) + \dots (\cos nx + i\sin nx)$

$C_n + iS_n = 1 + e^{ix} + e^{i2x} + \dots e^{inx}$

Somme d'une suite géometrique de premier terme 1 et de raison $q = e^{ix}$

• Si $q = 1$: $C_n + iS_n = \underbrace{1+1+1\dots+1}_{n+1 \text{ fois}} = n+1$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_n = n+1 \\ S_n = 0 \end{cases}$$

• Si $q \neq 1$: $C_n + iS_n = 1 \times \frac{1-(e^{ix})^{n+1}}{1-e^{ix}}$

$$C_n + iS_n = \frac{e^{i0} - e^{i(n+1)x}}{e^{i0} - e^{ix}}$$

$$C_n + iS_n = \frac{-2i\sin(\frac{n+1}{2}x)\, e^{i(\frac{n+1}{2}x)}}{-2i\sin(\frac{x}{2})\, e^{i\frac{x}{2}}}$$

$$\boxed{C_n + iS_n = \frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})} e^{i(\frac{n}{2}x)}}$$

$$\boxed{C_n + iS_n = \frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)\cos(\frac{n}{2}x)}{\sin(\frac{1}{2}x)} + i\,\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)\sin\frac{n}{2}x}{\sin(\frac{1}{2}x)}}$$

$$\begin{cases} C_n = \dfrac{\sin(\frac{n+1}{2}x)\cos(\frac{n}{2}x)}{\sin(\frac{1}{2}x)} \\ S_n = \dfrac{\sin(\frac{n+1}{2}x)\sin(\frac{n}{2}x)}{\sin(\frac{1}{2}x)} \end{cases}$$

2)

$C_n = \cos^2 x + \cos^2 x \cos 2x + \dots + \cos^n x \cos nx$

$S_n = \cos x \sin x + \cos^2 x \sin 2x + \dots + \cos^n x \sin nx$

$C_n + iS_n = (\cos^2 x + i\cos x \sin x) + (\cos^2 x \cdot \cos 2x + i\cos^2 x \cdot \sin 2x) + \dots (\cos^n x \cdot \cos nx + \cos^n x \cdot \sin nx)$

$$C_n + iS_n = \frac{1 - (\cos x\, e^{ix})^n}{1 - \cos x\, e^{ix}} \cdot \cos x\, e^{ix}$$

$$\cos x\, e^{ix} = \frac{1}{2}(2\cos x\, e^{ix})$$

$$\boxed{\cos x\, e^{ix} = \frac{1}{2}(1 + e^{i2x})}$$

Marieme Sehla/Cheikha

Meimouna / Brahim

Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que:

1. $|z+2-3i| = 2$
2. $|z+4+3i| = |z-3-4i|$
3. $\left|\frac{z+2-3i}{iz-1-i}\right| = 1$
4. $|z+2-3i| = |\bar{z}+2i|$
5. $|(1-i)z-2i| = |(1+i)z-4-4i|$
6. $\left|\frac{z+1+2i}{z-3i}\right| = 3$

Solution:

1) $|z+2-3i| = 2$ on pose $z_A = -2+3i$

$\Rightarrow |z-z_A| = 2 \Rightarrow M \in \Gamma_1 \Rightarrow AM = 2$

$\Rightarrow \Gamma\ \mathcal{E}(A, 2)$

2) $|z+4+3i| = |z-3-4i|$

on pose $z_A = -4-3i$; $z_B = 3+4i$

$M \in \Gamma_2 \Rightarrow |z-z_A| = |z-z_B| \Rightarrow MA = MB$

Γ_2 = mediatrice $[AB]$

3) $\left|\frac{z+2-3i}{iz-1-i}\right| = 1 \Rightarrow |z+2-3i| = |iz-1-i|$

$\Rightarrow |z+2-3i| = |i(z-\frac{1}{i}-1)| \Rightarrow$

$|z+2-3i| = |z+i-1|$ on pose

$z_A = -2+3i$; $z_B = -i+1$

$M \in \Gamma_3$ = mediatrice $[AB]$

4) $|z+2-3i| = |\bar{z}+2i|$

$\Rightarrow |z+2-3i| = |\overline{\bar{z}+2i}|$

$\Rightarrow |z+2-3i| = |z-2i|$

on pose $z_A = -2+3i$; $z_B = 2i$

alors $M \in \Gamma_4 \Rightarrow |z-z_A| = |z-z_B|$

Γ_4 est la mediatrice de $[AB]$

5) $|(1-i)z-2i| = |(1+i)z-4-4i|$

$\Rightarrow \left|(1-i)(z-\frac{2i}{1-i})\right| = \left|(1+i)(z-\frac{4+4i}{1+i})\right|$

$\Rightarrow |1-i||z+1-i| = |1+i||z-4|$

Γ_5 est la mediatrice de Segment $[A]$

6) $\left|\frac{z+1+2i}{z-3i}\right| = 3$ on pose $L = 3i$

$K = -1-2i$ $\qquad \frac{MK}{ML} = 3$

$\frac{MK^2}{ML^2} = 9 \Rightarrow MK^2 - 9ML^2 = 0$

$(\vec{MK}+3\vec{ML})(\vec{MK}-3\vec{ML}) = 0$

$P = \text{bar}\ \begin{array}{c|c} K & L \\ 1 & 3 \end{array} \qquad Q = \text{bar}\ \begin{array}{c|c} K & L \\ 1 & -3 \end{array}$

$4\vec{MP} - 2\vec{MQ} = 0$

$-8(\vec{MP}\cdot\vec{MQ}) = 0$

$M \in \mathcal{C}([PQ])$

Mariemе sehla / ~~cheik~~ cheikhna

Meïmouna / Brahim

Exercice 17

On muni le plan complexe d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit f_a l'application qui associe au point M d'affixe z le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = (a+\frac{1}{2}i)z + 4 - 4a - 2i, \qquad a \in \mathbb{C}$$

1) Reconnaître l'application f_a et la caractériser pour chacune des valeurs suivantes du nombre complexe a :

a) $a = 1-\frac{1}{2}i$ b) $a = 2-\frac{1}{2}i$ c) $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $a=\frac{1}{2}$

2) Dans la suite de l'exercice on suppose que $a \in \mathbb{R}$ et on note $\theta = \arg(a+\frac{1}{2}i)$. Soit les points $M_0(3;0)$ et $\Omega(4;0)$. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ on pose $M_{n+1} = f_a(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n.

a) Calculer et écrire sous forme algébrique : z_1 et z_2 en fonction de a.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $z_n = 4-(a+\frac{1}{2}i)^n$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $V_n = |z_n - 4|$. Pour quelles valeurs de θ ; la suite (V_n) est elle convergente ?

d) Calculer en fonction de n : d_n et $S_n = \sum_{k=0}^{n} d_k$. où $d_n = M_nM_{n+1}$

e) Pour $a=\frac{1}{2}$; déterminer la nature du triangle ΩM_nM_{n+1}. Placer les points M_0 ; M_1 et M_2. Calculer S_n et $\lim_{n\to\infty} S_n$ puis interpréter géométriquement.

Solution:

$\boxed{1}$ $z' = (a+\frac{1}{2}i)z + 4 - 4a - 2i$

a) $a = 1-\frac{1}{2}i$

$z' = (1-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}i)z + 4 - 4(1-\frac{1}{2}i) - 2i$

$z' = z + 4 - 4 + 2i - 2i$

$z' = z$ identité du plan

b) $a = 2-\frac{1}{2}i$

$z' = (2-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}i)z + 4 - 4(2-\frac{1}{2}i) - 2i$

$z' = 2z + 4 - 8 + 2i - 2i$

$z' = 2z - 4$ Homothétie de rapport $k=2$ de centre $\Omega(4)$.

c) $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$z' = (\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)z + 4 - 4(\frac{\sqrt{3}}{2}) - 2i$

$z' = e^{i\frac{\pi}{6}}z + 4 - 2\sqrt{3} - 2i$

rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ de centre $\Omega\left(\frac{4-2\sqrt{3}-2i}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}\right)$

$= 4\left(\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}\right) = \Omega(4)$.

d) $a = \frac{1}{2}$

$z' = (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)z + 4 - 4(\frac{1}{2}) - 2i$

http://maurimath.net/Espaceeleves.php

$Z' = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} Z + 4 - 2 - 2i$

$Z' = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} Z + 2 - 2i$

similitude de rapport $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de centre $\Omega(4)$.

$\boxed{2}$ $M_0(3,0)$; $\Omega(4;0)$

$M_{n+1} = S_a(M_n)$

$\theta = \arg\left(a + \frac{1}{2}i\right)$

a) $Z_1 = S_a(Z_0)$

$Z_1 = 3\left(a + \frac{1}{2}i\right) + 4 - 4a - 2i$

$Z_1 = 3a + \frac{3}{2}i + 4 - 4a - 2i$

$\boxed{Z_1 = 4 - a - \frac{1}{2}i}$

$Z_2 = S_a(Z_1)$

$Z_2 = \left(a + \frac{1}{2}i\right)\left(4 - a - \frac{1}{2}i\right) + 4 - 4a - 2i$

$Z_2 = 4a - a^2 - \frac{1}{2}ai + 2i - \frac{1}{2}ai + \frac{1}{4} + 4 - 4a + 2i$

$\boxed{Z_2 = \frac{17}{4} - a^2 - ai}$

b) $Z_n = 4 - \left(a + \frac{1}{2}i\right)^n$

$Z_1 = 4 - \left(a + \frac{1}{2}i\right)^1$

$Z_2 = 4 - \left(a + \frac{1}{2}i\right)^2$

on suppose que

$Z_n = 4 - \left(a + \frac{1}{2}i\right)^n$

* Calculons Z_{n+1}

$Z_{n+1} = \left(a + \frac{1}{2}i\right) Z_n + 4 - 4a - 2i$

$Z_{n+1} = 4\left(a + \frac{1}{2}i\right) - \left(a + \frac{1}{2}i\right)^{n+1} + 4 - 4a - 2i$

$Z_{n+1} = 4 - \left(a + \frac{1}{2}i\right)^{n+1} \Rightarrow$

$Z_n = 4 - \left(a + \frac{1}{2}i\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

c) $V_n = |Z_n - 4| = \left|a + \frac{1}{2}i\right|^n$

$V_n = \left|\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}}\, e^{i\theta}\right|^n$

$V_n = \left|\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}}^{\,n} e^{in\theta}\right|$

$V_n = \left(\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}}\right)^n$

V_n est une suite géom. de première terme $|z_0 - 4| = |-1| = 1$ est raison $q = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}}$

pour que $(V_n)_n$ converge il faut que $\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}} \leq 1$

$a^2 + \frac{1}{4} \leq 1 \Rightarrow a^2 \leq \frac{3}{4}$

$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq a \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta \in \left[\frac{\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6}\right]$

d) $S_n = \sum_{k=0}^{n} d_k \qquad d_n = M_nM_{n+1}$

$d_n = |z_{n+1} - z_n|$

$d_n = \left| 4 - \left(a+\frac{1}{2}i\right)^{n+1} - 4 + \left(a+\frac{1}{2}i\right)^n \right|$

$d_n = \left| \left(a+\frac{1}{2}i\right)^n - \left(a+\frac{1}{2}i\right)^{n+1} \right|$

$d_n = \left| \left(a+\frac{1}{2}i\right)^n \left(1 - a + \frac{1}{2}i\right) \right|$

$d_n = \left| \left(\sqrt{a^2+\frac{1}{4}}\right)^n \left(\sqrt{a^2-2a+\frac{5}{4}}\right) \right|$

$\boxed{d_n = V_n\left(\sqrt{a^2-2a+\frac{5}{4}}\right)}$

$S_n = d_0 + d_1 + \dots d_n$

$S_n = \sqrt{a^2+2a+\frac{5}{4}}\,\left[V_0 + V_1 \dots V_n\right]$

$S_n = \sqrt{a^2-2a+\frac{5}{4}}\left(\dfrac{1-\left(\sqrt{a^2+\frac{1}{4}}\right)^{n+1}}{1-\sqrt{a^2+\frac{1}{4}}}\right)$

e) pour $a = \frac{1}{2}$

$\arg\left(\dfrac{z_{n+1}-\Omega}{z_n - \Omega}\right) = \arg\left(\dfrac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^n}\right)$

$= \arg\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right) = \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$

$= \arg\left(\dfrac{\Omega - z_n}{z_{n+1}-z_n}\right)$

$= \arg\left(\dfrac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^n}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)}\right) = \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$

$\Omega M_n M_{n+1}$ est rectangle isocél en M_{n+1}

* $S_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \dfrac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow$

$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = 1+\sqrt{2}$

Mareime Sehela / cheikhna
Maïmouna / Brahim

http://maurimath.net/Espaceeleves.php

Exercice 14

Soient ABC et AB'C' deux triangles directs rectangles isocèles en A. Soient a,b,c,c',b' les affixes respectives des points A,B,C,B',C'.
1) Exprimer c et c' en fonction de a , b et b'.
2) Montrer que BB' = CC' et (BB') ⊥ (CC').

Solution :

1) * ABC rectangle isocèl direct

$$\frac{c-a}{b-a} = i \Rightarrow$$

$$c - a = i(b-a)$$

$$c = a + i(b-a)$$

$$\boxed{c = ib + (1-i)a}$$

* AB'C' rectangle isocèl direct.

$$\frac{c'-a}{b'-a} = i \Rightarrow$$

$$c' - a = i(b'-a)$$

$$c' = a + i(b'-a)$$

$$\boxed{c' = ib' + (1-i)a}$$

2) $$\frac{c'-c}{b'-b} = \frac{ib'+(1-i)a - ib - (1-i)a}{b'-b}$$

$$= \frac{ib'-ib}{b'-b} = \frac{i(b'-b)}{b'-b} = i$$

$\boxed{\text{Donc } (BB') \perp (CC')}$

Mareime Sehela / cheikhna
Meimouna / Brahim

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante:

$$10z^4-(39-3i)z^3+60z^2-(39-3i)z+10=0 \text{ ; (On pose } Z = z+\frac{1}{z}).$$

Solution

Solution :

$10z^4-(39-3i)z^3+60z^2-(39-3i)z+10=0$

on pose $Z = z+\frac{1}{z}$

$aZ^2+bZ+c=0$

$a\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+b\left(z+\frac{1}{z}\right)+c=0$

$a\left(\frac{z^2+1}{z}\right)^2+b\left(\frac{z^2+1}{z}\right)+c=0$

$a\left(\frac{z^4+2z^2+1}{z^2}\right)+b\left(\frac{z^2+1}{z}\right)+c=0$

$\frac{az^4+2az^2+a}{z^2}+\frac{bz^2+b}{z}+c=0$

$az^4+2az^2+a+bz^3+bz+cz^2=0$

$az^4+bz^3+(2a+c)z^2+bz+a=0$

$\begin{cases} a=10 \\ b=-39+3i \\ 2a+c=60 \Rightarrow c=40 \end{cases}$

$10Z^2-(39-3i)Z+40=0$

$\Delta=(39-3i)^2-1600$

$=1512+234i-1600$

$\Delta=-88+234i$

$\begin{cases} a^2-b^2=-88 \\ ab=117 \quad a=9 \quad b=13 \\ a<b \end{cases}$

$\delta=9+13i$

$Z_1=\frac{39-3i-9-13i}{20}$

$Z_1=\frac{30-16i}{20}=\frac{15-8i}{10}$

$Z_2=\frac{39-3i+9+13i}{20}$

$Z_2=\frac{48+10i}{20}=\frac{24+5i}{10}$

$\begin{cases} z_1+\frac{1}{z_1}=\frac{15-8i}{10} \\ z_2+\frac{1}{z_2}=\frac{24+5i}{10} \end{cases}$

$z_1^2+1-\left(\frac{15-8i}{10}\right)z=0$

$z_1^2-\left(\frac{15-8i}{10}\right)z+1=0$

~~Exercice 20~~ | Bac

On considère un triangle ABC de sens direct et on construit à l'extérieur de ce triangle trois triangles ACQ, BAR et CBP rectangle et isocèle respectivement en A, B et C. Soient P', Q' et R' les milieux respectifs des segments [BP], [CQ] et [AR].
L'objectif de cette partie est de montrer que les triangles ABC, PQR et P'Q'R' sont de même centre de gravité. On considère le plan complexe muni du repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. Soient a, b, c, p, q, r, p', q' et r' les affixes respectives des points A, B, C, P, Q, R, P', Q' et R'.

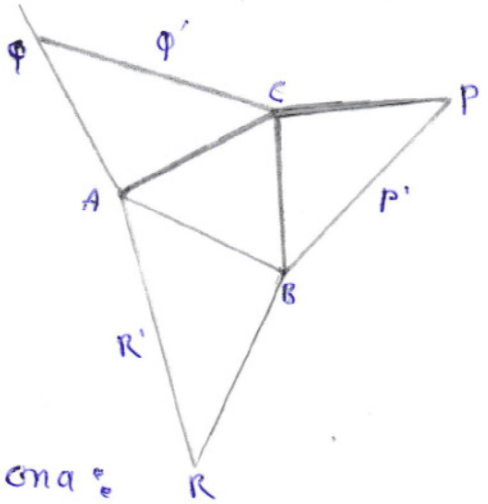
1. Faire une construction illustrant les données précédentes.

2.a) Montrer que $p' = \frac{b - ic}{1 - i}$ puis écrire q' en fonction de a et c ; r' en fonction de a et b.

b) Calculer $p'+q'+r'$ en fonction de a, b et c puis en déduire que les triangles ABC et P'Q'R' ont le même centre de gravité G d'affixe g.

3. Exprimer chacun des complexes p, q et r en fonction de a, b et c puis montrer que les triangles ABC et PQR ont le même centre de gravité G.

Solution:



2.a) On a :

$$\begin{cases} (\overrightarrow{P'C}, \overrightarrow{P'B}) = \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \\ P'C = P'B \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{p' - b}{p' - c} = i$$

$$\Rightarrow p' - b = i(p' - c)$$

$$\Rightarrow p' - ip' = b - ic$$

$$\Rightarrow (1 - i)p' = b - ic$$

$$\Rightarrow \boxed{p' = \frac{b - ic}{1 - i}}$$

De même, on déduit que :

$$\boxed{q' = \frac{c - ia}{1 - i}, \quad r' = \frac{a - ib}{1 - i}}$$

b) $p' + q' + r' = \frac{1}{1-i}(b - ic + c - ia + a - ib)$

$p' + q' + r' = \frac{1}{1-i}(1-i)(a+b+c)$

$$\boxed{p' + q' + r' = a + b + c}$$

Alors les triangles P'Q'R' et ABC ont même centre de gravité G d'affixe

$$g = \frac{1}{3}(a+b+c)$$

3) On a :

$$\begin{cases} (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CP}) = \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \\ CB = CP \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{p - c}{b - c} = i \Rightarrow p - c = i(b - c)$$

$$\Rightarrow \boxed{p = ib + (1 - i)c}$$

$$Z_5 = \frac{1 + \cos\theta + i\sin\theta}{1 + \cos\theta - i\sin\theta}$$

$$Z_5 = \frac{e^{i0} + e^{i\theta}}{e^{i0} + e^{-i\theta}} \Rightarrow Z_5 = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{e^{-i\frac{\theta}{2}}}$$

$$Z_5 = e^{i\theta}$$

$$\begin{cases} |Z_5| = 1 \\ \arg(Z_5) = \theta \end{cases}$$

De même manière on trouve :

$q = ic + a(1-i)$

$r = ia + b(1-i)$

on Verifie aisément que :

$$\boxed{g = \frac{1}{3}(p+q+r)}$$

Alors ABC et PQR ont même Centre de gravité G.

Conclusion :

Les trois triangles ABC, PQR et P'Q'R' ont même Centre de gravité G.